753. Produktraum ノ次元ニ就テ

山 内 省 三（阪大）

§1. F_1, F_2 ヲ夫々 r, r' 次元ノ Kompaktum トスレバ dim.$(F_1 \times F_2) \leq$ dim.F_1 + dim F_2 （dim. ハ Brouwer ノ意味ノ次元）ハ成立スルガ等号ハ一般ニ成立シナイ（C.R. 190 (1930). Pontrjagin ノ例）. 然シ F_1 ガ任意次元ノ Kompakt ナ空間, F_2 ガ 1 次元ノ separable ナ空間ナルトキハ上ノ等号ガ成立スルコトヲ Hurewicz ガ示シテキル（Ann. of. Math. vol. 36. (1935) p. 194）. F_2 ガ一次元ノ Kompaktum ナルトキハ勿論等号ハ成立スル。コヽデハ F_1, F_2 ガ夫々 1 ヨリ大ナル次元（Brouwer ノ意味ノ）ノ Kompaktum ナルトキ上ノ等式ガ成立スルタメノ一ツノ充分條件ヲ示シタイ。

§2. Produktraum $F = F_1 \times F_2$ ヲ近似スル Spektrum.

F_1, F_2 ヲ夫々ゆーくりっど空間 R 内ノ r 次元, r' 次元 Kompaktum トシコレラノ Unterteilung ノ Folge ヲ

$$F_1 :\ p_1,\ P_2,\ \cdots\cdots\ P_h\ \cdots\cdots$$

$$F_2 :\ p_1',\ P_2',\ \cdots\cdots\ P_h'\ \cdots\cdots$$

（P_h, P_h' ハ ε_h-überdeckung. $\lim \varepsilon_h = 0$）

及ビ對應スル Nerv ノ Folge ヲ

$$F_1 :\ (1)\quad K_1,\ K_2,\ \cdots\cdots,\ K_h,\ K_{h+1}\ \cdots\cdots$$

$$K_h = \varphi_h(K_{h+1}),\ \dim K_h = r$$

F_2 : (2) $K'_1, K'_2, \cdots\cdots, K'_h, K'_{h+1} \cdots\cdots$

$$K'_h = \varphi'_h(K'_{h+1}), \dim K'_h = r'$$

トスルトFハ Zellenkomplex ノ Folge

(3) $K_1 \times K'_1, K_2 \times K'_2, \cdots\cdots K_h \times K'_h, K_{h+1} \times K'_{h+1}, \cdots\cdots$ ニヨリ定義サレル。

コヽニ $K_{h+1} \times K'_{h+1}$ カラ $K_h \times K'_h$ ヘノ abbildung ϕ_h ハ

$$\phi_h(K_{h+1} \times K'_{h+1}) = \varphi_h(K_{h+1}) \times \varphi'_h(K'_{h+1}) = K_h \times K'_h$$

ニテ定義スル。

$$\dim(K_h \times K'_h) = r + r'$$

(注意) 任意ノ二数 $k, h, k > h$ ニ對シテ $K_k \times K'_k$ カラ $K_h \times K'_h$ ヘノ Projektion ハ

$$K_h \times K'_h = \phi^k_h(K_k \times K'_k) = \phi_h \cdots\cdots \phi_{k-2} \cdot \phi_{k-1}(K_k \times K'_k)$$

ニテ定義サレル。

証明:[1)]

F_1 ノ点 x, F_2 ノ点 y ヲ定義スル Projektionsfolge ヲ夫々

$$\xi(x) = (T_1, T_2, \cdots\cdots, T_h \cdots\cdots)$$

$$\eta(y) = (T'_1, T'_2, \cdots\cdots, T'_h \cdots\cdots)$$

ナルトキ

Fノ点 $p = (x, y)$ ヲ定義スル Folge トシテ

$$\zeta(x, y) = (T_1 \times T'_1, T_2 \times T'_2, \cdots\cdots, T_h \times T'_h \cdots\cdots)$$

---

1) P. Alexandroff „Gestalt und Lage" ann. of Math. vol. 30.

ヲ考ヘル。

コヽニ $T_k \times T'_k$ ハ simplex デハナイ。

即チ K_k, K'_k ガ simplizial デモ $K_k \times K'_k$ ハ simplizial デハナイ。Zellen komplex デアル。

$$\zeta(p_1) = (T_1^{(1)} \times T_1'^{(1)}, T_2^{(1)} \times T_2'^{(1)}, \cdots\cdots, T_k^{(1)} \times T_k'^{(1)}, \cdots\cdots)$$
$$= \mathfrak{X}(x_1) \times \mathfrak{Y}(y_1)$$
$$\zeta(p_2) = (T_1^{(2)} \times T_1'^{(2)}, T_2^{(2)} \times T_2'^{(2)}, \cdots\cdots, T_k^{(2)} \times T_k'^{(2)}, \cdots\cdots)$$
$$= \mathfrak{X}(x_2) \times \mathfrak{Y}(y_2)$$

ナルトキ

$\zeta(p_1), \zeta(p_2)$ ガ benachbar ト云フノハ

(i) $\mathfrak{X}(x_1)$ ト $\mathfrak{X}(x_2)$ トガ benachbar デ $\mathfrak{Y}(y_1) = \mathfrak{Y}(y_2)$

(ii) $\mathfrak{Y}(y_1)$ ト $\mathfrak{Y}(y_2)$ トガ benachbar デ $\mathfrak{X}(x_1) = \mathfrak{X}(x_2)$

(iii) 或ハ $\mathfrak{X}(x_1)$ ト $\mathfrak{X}(x_2)$, $\mathfrak{Y}(y_1)$ ト $\mathfrak{Y}(y_2)$ トガ同時ニ benachbar ノトキ。

上ノ何レノ場合ニモ、ソレガ F ニ於ケル同一ノ点ニ對應スルコトハ明。

$\zeta(p_1)$ ガ $\zeta(p_2)$ ヲ umfassen スルト云フノハ

(i) $\mathfrak{X}(x_1)$ ガ $\mathfrak{X}(x_2)$ ヲ umfassen シテ, $\mathfrak{Y}(y_1) = \mathfrak{Y}(y_2)$

(ii) $\mathfrak{Y}(y_1)$ ガ $\mathfrak{Y}(y_2)$ ヲ umfassen シテ $\mathfrak{X}(x_1) = \mathfrak{X}(x_2)$

(iii) 或ハ $\mathfrak{X}(x_1)$ ガ $\mathfrak{X}(x_2)$ ヲ, 及ビ $\mathfrak{Y}(y_1)$ ガ $\mathfrak{Y}(y_2)$ ヲ夫々同時ニ umfassen スルトキ。

コノ定義カラ先ヅ

F ノ点 $P = (x, y)$ ニハ唯一ツノ Kette $\zeta(p)$ ガ對應スルコトハ容易ニワカル。

逆ニ $\zeta=(T_1\times T_1', T_2\times T_2', \cdots\cdots, T_h\times T_h', \cdots\cdots)$ ニ於テ $F(T_h)$, $F(T_h')$ ヲ夫々 F_1, F_2 ノ *Unterteilung* ノ T_h, T_h' ノ各 *Eckpunkt* ニ對應スルスベテノ *Menge* $F^{(1)}_{i_1\cdots\cdots i_h}$, $F^{(2)}_{i_1\cdots\cdots i_h}$ ノ *Durchschnitt* トスルトキ各 h ニ對シテ夫々スベテノ $F(T_h)$, $F(T_h')$ ニ屬スル唯一点 x 及ビ y ガ存在スル。コノ点 $P(x, y)$ ガ即チ ζ ニ對應スル F ノ点デアル。

今 *Kette* ζ ヲ *Raumpunkt*、*Kette* ヲ構成スル各 *Zelle* ヲソノ座標トスレバ任意ノ *Raumpunkt* $\zeta(P_0) = \mathfrak{x}(x_0)\times\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* トハ次ノ何レカノ條件ヲ滿足スル *Raumpunkt* $\zeta(P)=\mathfrak{x}(x)\times\mathfrak{y}(y)$ スベテヨリ成ル。

(i) $\mathfrak{x}(x)$ ガ $\mathfrak{x}(x_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ $\mathfrak{y}(y_0)=\mathfrak{y}(y)$

(ii) $\mathfrak{y}(y)$ ガ $\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ $\mathfrak{x}(x_0)=\mathfrak{x}(x)$

(iii) $\mathfrak{x}(x)$ ガ $\mathfrak{x}(x_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ、同時ニ $\mathfrak{y}(y)$ ガ $\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬スル。

カクシテ *Spektrum* ニヨリ定義サレタ空間ヲ $\mathfrak{F}$ トスレバ上ノコトカラ

F ト $\mathfrak{F}$ トノ間ニハ一對一ノ對應 f ガ存在スル。次ニコノ f ガ両連續ナルコトヲ云フ。（F_1 ニ於テハ $f=f_1$, F_2 ニ於テハ $f=f_2$ 即チ $f(x, y)=(f_1(x), f_2(y)=\mathfrak{x}(x)\times\mathfrak{y}(y))$

(i) fハ Fヲ $\mathfrak{F}$ ニ連続ニ abbilden スル。

$F \ni p(x, y)$: $p(x, y)$ ノ x, y ニ對シテ ε_x^m, ε_y^m ヲ夫々 x, y ヨリ F_1, F_2 ニ於テ x, y ヲ含マザル Unterteilung ノ Menge $F^{(1)}_{i_1 \cdots\cdots i_m}$, $F^{(2)}_{i_1 \cdots\cdots i_m}$ ノ和集合 Ψ_x^m, Ψ_y^m ニ至ル距離トスル。ρ_x^m, ρ_y^m ヲ夫々 $\varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2, \cdots\cdots \varepsilon_x^m$ 及ビ $\varepsilon_y^1, \varepsilon_y^2, \cdots\cdots \varepsilon_y^m$ ノ最小ノモノトシ $\mathrm{Min}(\rho_x^m, \rho_y^m) = \rho^m$ トスル。今任意ニ定メタ F ノ点 $p_0(x_0, y_0)$ ニ對シ $U_m(\mathfrak{x}_0)$, $U_m(\mathfrak{y}_0)$ ヲ $\mathfrak{x}_0(x_0) = f_1(x_0)$, $\mathfrak{y}(y_0) = f_2(y_0)$, m-te Umgebung トスレバ $\rho(x_0, x) < \rho^m$, $\rho(y_0, y) < \rho^m$ ナル x, y ニ對シテハ各 m ニ就テ $\mathfrak{x}(x) \subset U_m(\mathfrak{x}_0)$, $\mathfrak{y}(y) \subset U_m(\mathfrak{y}_0)$

$$\therefore \zeta(p) = \mathfrak{x}(x) \times \mathfrak{y}(y) \subset U_m(\mathfrak{x}_0) \times U_m(\mathfrak{y}_0)$$
$$= V_m(\mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{y}_0)$$

コノコトハ各 m ニ對シテ成立ツ。 (以上)

(ii) fハ $\mathfrak{F}$ ヲ F ニ連続ニ abbilden スル。

$\varepsilon > 0$ 及ビ $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0) \subset \mathfrak{F}$ ガ任意ニ與ヘラレタトスル。充分大ニ m ヲトッテ $\varepsilon_m < \varepsilon$ ナラシム。任意ニ選バレタ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \subset V_m(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ ニ對シテ $\mathfrak{x} \subset U_m(\mathfrak{x}_0)$, $\mathfrak{y} \subset U_m(\mathfrak{y}_0)$ 從ッテ $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, $\rho(y, y_0) < \varepsilon$ (以上)

§3. F_1, F_2 ヲユークリッド空間 R 内ニアル次元 (Brouwer ノ意味ノ) r, r' ナル einfach zyklische Menge[2] トスレバ $\dim(F_1 \times F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

証明: $\dim(F_1 \times F_2) \leq \dim F_1 + \dim F_2$ ハ既ニ知ラレテヰルカラ $\dim(F_1 \times F_2) \geq \dim F_1 + \dim F_2 = r + r'$ ナルコトヲ云ヘバヨイ。 (脚註2ハ次頁ヘ)

F_1, F_2 ノ Unterteilung ノ Folge ヲ

$$(1)\quad \begin{cases} F_1: & P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k, \cdots\cdots \\ F_2: & P'_1, P'_2, \cdots\cdots, P'_k, \cdots\cdots \end{cases}$$

F_1, F_2 ニ於テ幾何学的ニ実現サレタ Nerv ノ Folge 即チ Projektionsspektrum ヲ

$$(2)\quad \begin{cases} F_1: & N_1, N_2, \cdots\cdots, N_k, \cdots\cdots & \varphi_k = (N_{k+1}) = N_k \\ F_2: & N'_1, N'_2, \cdots\cdots, N'_k, \cdots\cdots & \varphi'_k = (N'_{k+1}) = N'_k \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_k\text{-Überführung } \psi_k \ (\lim \varepsilon_k = 0) \\ \varepsilon'_k\text{-Überführung } \psi'_k \ (\lim \varepsilon'_k = 0) \end{array}\right\}$ ニヨリ F_1, F_2 ノ移ル

$\overline{N}_k, \overline{N}'_k$ ノ Teilmenge. $\overline{N}_{k,1} \subset \overline{N}_k$, $\overline{N}'_{k,2} \subset \overline{N}'_k$ $(N_{k,1} \subset N_k,\ N'_{k,2} \subset N'_k)$ トスル。

F_1, F_2 ガ einfach zyklisch ナル故 $\overline{N}_{k,1}, \overline{N}'_{k,2}$ ハ連続函数 g_k, g'_k ニヨリ $S^r, S^{r'}$ ニ wesentlich ニ abbilden サレル. 従ツテ Hopf ノ Satz ニヨリ各 $N_{k,1}$, $N'_{k,2}$ 内ニ algebraisch Zyklus Z_k, Z'_k (mod m_k) ガ存在シテ g_k, g'_k ニヨル grad ハ Null デハナイ (mod m_k).

$\left.\begin{array}{l} Z^r = (Z^r_1, Z^r_2, \cdots\cdots, Z^r_k, \cdots\cdots) \\ Z'^{r'} = (Z'^{r'}_1, Z'^{r'}_2, \cdots\cdots, Z'^{r'}_k \cdots\cdots) \end{array}\right\}$ ハ夫々 F_1, F_2 ニ於テメ〇ナル wahr Zyklus.

$Z_1 \times Z_2 \nsim 0$ in $F = F_1 \times F_2$ ガ云ヘレバヨイ。

$$Z_1 \times Z'_2 = (Z_1 \times Z'_1,\ Z_2 \times Z'_2, \cdots\cdots, Z_k \times Z'_k, \cdots\cdots) \sim 0 \text{ in}$$

---

2) P. Alexandroff Dimensionstheorie Math. Ann. 106, 5. Hauptsatz)

Fト假定スルト

$$Z_h^r \times Z_h'^{r'} = \dot{C}_h^{r+r'+1}$$ ナル Komplex $C_h^{r+r'+1}$ ガ F 内ニ存在ス。

$\Phi_h(F) = (\psi_h(F_1), \psi'_h(F'_2))$ ナル連續函数ニヨリ F ハ Menge.

$\bar{N}_{h,1} \times \bar{N}'_{h,2}$ ニ überführen サレル。コノ際
$\Phi_h(Z_h \times Z'_h) = Z_h \times Z'_h \subset N_{h,1} \times N'_{h,2}$ 便宜上 $C_h^{r+r'+1} = C$ ト書ク。C ヲ充分小サク Unterteilen シテ（ソノ際 $Z_h \times Z'_h$ モ unterteilen サレルガ、コレハ N_h, N'_h ヲ unterteilen スルコトニヨリ各 Z_h, Z'_h ヲ unterteilen シテオク）コレヲ C' トスルトキ $\Phi_h(C')$ ガ δ-Komplex ナル様ニスル。ココニ $\delta < d(P_h)$, $\delta < d(P'_h)$ [3)]

$Z_h \times Z'_h = \Phi_h(\dot{C}) = (\Phi_h(C))^{\cdot}$, Z_h, Z'_h ノ Unterteilung ヲ $\mathbb{Z}_h, \mathbb{Z}'_h$ トスレバ

$\mathbb{Z}_h \times \mathbb{Z}'_h = \Phi_h(\dot{C}') = (\Phi_h(C'))^{\cdot} = \dot{C}''$ ココニ $\Phi_h(C') = C''$.

C'' ノ頂点ノ内 $\mathbb{Z}_h \times \mathbb{Z}'_h$ ノ頂点デ Unterteilung ニヨリ新ニ出來タモノ、例ヘバ $P(x, y)$ ハ夫々 x, y ヲ含ム P_h, P'_h ノ Element ニ對應スル頂点ニ移シ $\mathbb{Z}_h \times \mathbb{Z}'_h$ 以外ノモノ、例ヘバ $p'(\psi_h(x), \psi'_h(y))$ ハ $\psi_h(x), \psi'_h(y)$ ヲ含ム P_h, P'_h ノ Element ニ對應スル頂点ニ移ス、コレラノ Verschiebung ヲ ϕ トスレバ, $\phi(\mathbb{Z}_h \times \mathbb{Z}'_h) = Z_h \times Z'_h$, $\phi(C'') = C'''$, C''' ハ $N_{h,1} \times N'_{h,2}$ ノ Teilkomplex デ

$$\dot{C}''' = Z_h \times Z'_h \quad \text{in } N_{h,1} \times N'_{h,2}$$

---

3) Alexandroff „gestalt u. Lage" P. 116

故ニ C''' ハ degenerated complex.

従ッテ $\dot{C}'''$ ハ degenerated. 一方 $Z_k \times Z'_k$ ハ not degenerated, コレハ矛盾.

$$\therefore \quad Z_k \times Z'_k \not\sim 0 \quad \text{in } F = F_1 \times F_2$$

$$\therefore \quad \dim(F) = \dim(F_1 \times F_2) \geqq r + r'$$

$$\therefore \quad \dim F = \dim F_1 + \dim F_2 .$$

q. e. d.

コノ方法ハ Sphäre ニ wesentlich ニ abbilden サレルコトカラ F ニテ $\not\sim 0$ ナ Zyklus ヲ見出ス方法デアッタ、直接ニヤルニハ即チ

定理:

ゆーくりっど空間 R 内ニアル r, r' 次元ノ Kompaktum F_1, F_2 ニ於テ夫々 not homolog Null ナル wahrer Zyklus (nach variable Modul) Z^r, $Z^{r'}$ が存在スルトキハ $Z^r \times Z^{r'}$ モ亦 $F_1 \times F_2$ ニ於イテ not homolog Null ヲ証明スレバヨイ。

証明ハ前ト殆ンド同ジデアル。ヤハリ $Z \times Z' \sim 0$ in F ト仮定シテ $Z_k \times Z'_k = \dot{C}_k$ ナル Komplex C_k ヲ考ヘルノデアルガ Φ_k ニヨリ F ヲ $\overline{N}_{k,1} \times \overline{N}'_{k,2}$ ニ überführen シタ際ニ $\psi_k(Z_k)$, $\psi_k'(Z_k)$ ハ夫々 $\overline{N}_{k,1}$, $\overline{N}'_{k,2}$ 内デ少シズレルカラ C_k ヲ充分小サク unterteilen シテ $\Phi_k(C')$ がヤハリ δ-Komplex ナル様ニスル、コヽニ $\delta < d(P_k)$, $\delta < d(P'_k)$

$\Phi_k(C')$ ノ Eckpunktverschiebung ϕ ヲ今度

ハ $\Psi_h(\mathfrak{Z}_h)$, $\Psi'_h(\mathfrak{Z}'_h)$ ＝モホドコストコト。適當ニ大ナルhニ對シテハ $\Phi\Psi_h(\mathfrak{Z}_h)$, 及ビ $\Phi\Psi'_h(\mathfrak{Z}'_h)$ ハ夫々 $N_{h,1}$, $N'_{h,2}$ ニ於ケル degenerate シナイ Zyklus.

然モ $\Phi\Psi_h(\mathfrak{Z}_h)\times\Phi\Psi_h(\mathfrak{Z}'_h)=(\Phi\Xi_h(C'))^{\cdot}$.

in $N_{h,1}\times N'_{h,2}$

故ニ $(\Phi\Xi_h(C'))^{\cdot}$ ハ degenerate ナ Komplex 故ニソノ Rand ハ degenerate コレハ矛盾。 q.e.d.